



Estructura de la Materia en las Estrellas de Neutrones
Structure of Matter in Neutron Stars

Autor: Gaspar Moreno Navarro
correo electrónico: gaspar.moreno@fis.ucm.es

Director del Trabajo: Felipe J. Llanes Estrada
correo electrónico: flanes@fis.ucm.es

Trabajo Fin de Máster en Física Fundamental
(2011)

Resumen

Los modelos actuales de la estructura y composición de la materia en las estrellas de neutrones son complejos pues requieren predecir los datos astrofísicos (masa, radio, parámetros de Kepler en sistema binarios, perfil de las señales de su espectro, etc.) a partir de la ecuación de estado de la materia comprimida. Tras repasar los aspectos más relevantes de la estructura de la materia en las estrellas de neutrones, se describen 2 resultados originales: (1) Un Test observacional para confirmar la hipótesis de que la corteza de la estrella de neutrones contiene hierro en forma cristalina¹, para ello se requiere la existencia de una estrella doble de neutrones, compuesta por una estrella de neutrones fría, y su compañera un púlsar o una fuente de rayos X, al objeto de estudiar los patrones de difracción de Bragg que puedan ser observados, y (2) Un cálculo variacional basado en el modelo Cornell del gauge de Coulomb QCD, para mostrar la posibilidad de que los neutrones en la estrella puedan adoptar simetría cúbica a un coste de energía de 150 MeV. Comparando este resultado con la energía libre de Helmholtz obtenida al deformar los neutrones, se infiere un suavizamiento de la ecuación de estado (EoS) de la materia de neutrones.

Abstract

Current theories of Neutron Stars structure and composition are very complex. As very information-rich equations of state (EoS) have to be tested with few astrophysics data (mass, size, pulsar period and time dependence, etc.). After a brief overview of the most relevant issues on the structure of neutron stars interiors, we here propose two original results: (1) An observational test to confirm the hypothesis that the outer-most layer of the star contains iron in crystalline form², that requires the existence of a double neutron star composed of one cooled-down neutron star and a pulsar or X-ray emitting companion, for studying the resulting Bragg's diffraction pattern observed, and (2) A variational computation within the Cornell model of Coulomb gauge QCD, to show that neutrons in the star can adopt cubic symmetry at an energy cost of 150 MeV. Balancing this result with the Helmholtz free energy gained by increasing neutron packing, a possible softening of the Equation of State (EoS) of neutron matter would ensue.

Palabras clave: Estrellas de Neutrones, Difracción de Bragg, Gauge de Coulomb QCD, Neutrones Cúbicos, Púlsar, fuentes emisoras de Rayos X, Materia de Quarks: condensados, diagrama de fases

Key words: Neutron Stars, Bragg Diffraction, Coulomb gauge QCD, Cubic neutrons, Pulsar, X- rays sources, Quark matter: condensates, phase diagram

¹Artículo aceptado para su publicación en la revista *Astrophysics and Space Sciences*. "Bragg Diffraction and the Iron Crust of Cold Neutron Stars", Felipe J. Llanes-Estrada and Gaspar Moreno-Navarro. En prensa.

²A paper has been accepted for its publication in *Astrophysics and Space Sciences*. "Bragg Diffraction and the Iron Crust of Cold Neutron Stars", Felipe J. Llanes-Estrada and Gaspar Moreno-Navarro. In press.

Índice de contenidos

1. Introducción y Motivación	1
2. Estructura de la materia en el interior de las estrellas de neutrones.....	1
3. Resultados originales obtenidos.....	4
3.1. Difracción de Bragg en la corteza. ¿Tienen las estrellas de neutrones una capa cristalina en su corteza?.....	4
3.2. Neutrones cúbicos. Cálculo variacional basa- do en el modelo Cornell del gauge de Coulomb QCD.....	7
3.2.1. Simulación de neutrones cúbicos.....	7
3.2.2. Cálculo variacional	9
4. Conclusiones.....	10
Bibliografía.....	11
Apéndice A: Figuras Extra Complementarias.....	12

AUTORIZACIÓN DE DIFUSIÓN DEL TRABAJO

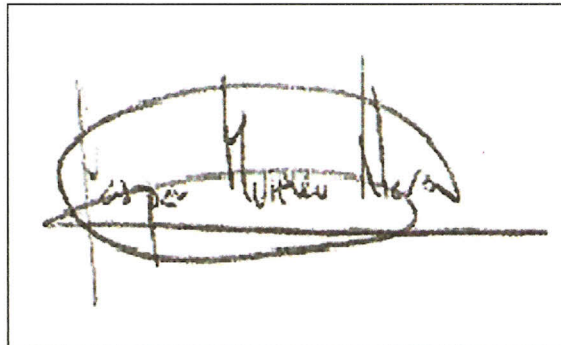
El abajo firmante, matriculado en el Máster de Física Fundamental de la Facultad de Ciencias Físicas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo de Fin de Máster:

ESTRUCTURA DE LA MATERIA EN LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES, realizado durante el curso académico 2010-2011 bajo la dirección del Profesor D. Felipe José Llanes Estrada en el Departamento de Física Teórica I, y a la Biblioteca de la UCM a depositarla en el Archivo institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

La publicación en abierto tendrá un embargo de:

 X Ninguno

Fdo: Gaspar Moreno Navarro

A rectangular box containing a handwritten signature in dark ink. The signature is stylized and appears to read 'Gaspar Moreno Navarro'.

1. Introducción y Motivación

Han transcurrido más de 70 años desde que se predijera la existencia teórica de las estrellas de neutrones [1], como remanentes de las explosiones de supernova originadas por el colapso gravitacional de estrellas ordinarias. La visión actual es que las estrellas de neutrones se forman en las explosiones de supernova tipo II; es decir, tras el colapso final de estrellas progenitoras masivas, cuya masa M esté comprendida entre 8 y 25 masas solares, tras consumir todo su combustible nuclear. Pero, no fué hasta que en 1968 se descubrieran los radiopúlsares [2], sugiriendo que podrían ser estrellas de neutrones, cuando se inició una intensa investigación y búsqueda de este tipo de estrellas. Es decir, los púlsares son estrellas de neutrones en rotación con su momento magnético inclinado respecto al eje de rotación de la estrella, que emiten un haz de radiación electromagnética a lo largo de su eje magnético, y al rotar la estrella, dicho haz de radiación es observado desde la tierra como un faro, de ahí el nombre de *Púlsar*. Las estrellas de neutrones se detectan y observan actualmente en un amplio rango de frecuencias del espectro electromagnético, desde las radiofrecuencias hasta los rayos gamma de alta energía. Actualmente, se estima en nuestra galaxia, una población de estrellas de neutrones del orden de 10^8 y se han detectado más de 1700¹.

Sin embargo, la comprensión de los procesos físicos involucrados en la formación, composición y estructura de la materia en su interior es todavía incompleta, debido a que en el interior de las estrellas de neutrones se encuentra materia nuclear en condiciones extremas, en un rango de densidades que abarca más de 15 órdenes de magnitud. Por eso, antes de describir los resultados originales de nuestra investigación sobre el tema, vamos a repasar brevemente los aspectos fundamentales de la física en el interior de las estrellas de neutrones como: la ecuación de estado, la relación masa - radio y algunas consideraciones sobre observables astrofísicos relevantes.

¹Un catálogo actualizado de púlsares puede consultarse en la página web del ATNF (Australia Telescope National Facility): <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>

2. Estructura de la materia en el interior de las estrellas de neutrones

Los modelos actuales sobre la estructura de la materia en el interior de las estrellas de neutrones consideran que la densidad de la materia varía en un rango que va desde la densidad de la materia formada por átomos de hierro ($\rho \sim 7,9g.cm^{-3}$), en forma de red cristalina en la superficie de la corteza de la estrella, hasta $(10 - 15)\rho_0$ veces la *densidad de saturación de la materia nuclear normal* que es $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14}g.cm^{-3}$, equivalente a una densidad del número de nucleones $n_0 = 0,16fm^{-3}$. Además, si consideramos que la masa típica de una estrella de neutrones es $M = 1,4M_\odot \simeq 1,4 \times 1,99 \times 10^{33}g$, y que tienen un radio típico $R = 10km$, entonces en el interior de la estrella su densidad de masa media es $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 6,7 \times 10^{14}g.cm^{-3} \sim (2 - 3)\rho_0$. Pero, además en el centro de la estrella su densidad de masa puede alcanzar entre $(10 - 15)\rho_0$, por ello se consideran las estrellas más densas y compactas del universo.

La estructura y propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones, suponiendo por sencillez que tienen simetría esférica y no rotan, vienen determinadas por las ecuaciones y condiciones de equilibrio hidrostático de la Teoría General de la Relatividad, conocidas como ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)[3]:

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{G[\varepsilon(r) + P(r)][m(r)c^2 + 4\pi r^3 P(r)]}{c^4 r^2 [1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}]} \quad (1)$$

$$m(r) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^r r'^2 \varepsilon(r') dr' \quad (2)$$

siendo $m(r)$ la masa gravitacional dentro de una esfera de radio r , incluyendo la energía de enlace gravitacional, $P(r)$ la presión, $\varepsilon(r)$ la densidad de energía, G es la constante gravitacional y c la velocidad de la luz en el vacío. Estas ecuaciones muestran que las propiedades globales de una estrella, como su masa y su radio, dependen directamente de la relación entre la presión $P(r)$ y la densidad de energía $\varepsilon(r)$ o

bien entre la presión $P(r)$ y la densidad de masa $\rho(r) = \frac{\varepsilon(r)}{c^2}$; es decir, de la Ecuación de Estado (EoS), $P = P(\varepsilon)$, de la materia en su interior, la cual depende a su vez, de las interacciones nucleares y entre partículas existentes. Por lo que, cuando se dispone de medidas observacionales precisas de las relación entre la Masa y el Radio, $M(R)$, de una estrella de neutrones, como en algunos casos de estrellas binarias, se puede obtener información sobre la estructura y tipo de EoS en el interior de la estrella. En la práctica, lo habitual es obtener la relación Masa-Radio a partir de una ecuación de estado teórica dada [4]. Además, el número bariónico en el interior de una esfera de radio r viene dado por:

$$N(r) = 4\pi \int_0^r \frac{r'^2 n(r') dr'}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r')}{c^2 r'}}}, \quad (3)$$

donde $n(r)$ es el perfil de densidad bariónica de la estrella. Para resolver estas ecuaciones se imponen como condiciones de contorno que la presión en la superficie de la estrella sea cero, $P(R) = 0$, que la masa gravitacional total de la estrella sea $M = m(R)$, que el número bariónico total sea $N = N(R)$ y la condición relativista: $R \geq \frac{2GM}{c^2}$ (condición de Schwarzschild). De modo, que dada una (EoS), que proporciona una relación de dependencia $P = P(\varepsilon)$, las soluciones de las ecuaciones TOV proporcionan una única relación entre la masa, M , y la densidad bariónica en el centro, $n(r=0)$.

Sin embargo, aunque se pueden hacer medidas astrofísicas muy precisas de las masas de estrellas de neutrones en sistemas binarios, mediante medidas astronómicas de desplazamientos Doppler y otros efectos relativistas de las líneas espectrales, las medidas del radio o del momento de inercia de las estrellas de neutrones son mucho menos precisas que las obtenidas para las masas.

Por ello, la obtención de medidas precisas de la relación Masa-Radio en las estrellas de neutrones observadas es el objetivo fundamental de la Astrofísica observacional. Un test habitual para medir las relación Masa-Radio en las estrellas de neutrones se basa en la medida del *efecto relativista de corri-*

miento hacia el rojo gravitacional [5]. Que consiste en medir la pérdida de energía que experimentan los fotones que salen de la estrella para escapar de su campo gravitatorio. Se expresa normalmente mediante la relación (4) entre la frecuencia de los fotones, ν_0 , emitidos en la superficie de la estrella, respecto de un sistema de referencia local, y la frecuencia de dichos fotones, ν_∞ , detectados por un observador distante

$$\nu_\infty = \nu_0 (1 - x_{GR})^{\frac{1}{2}} = \frac{\nu_0}{(1 + z)} \quad (4)$$

donde $z = (1 - \frac{2GM}{c^2 R})^{-\frac{1}{2}} - 1$ es el *parámetro de corrimiento hacia el rojo gravitacional*. Por lo que si obtenemos el valor de z , entonces podemos conocer la relación Masa-Radio a partir de la relación $x_{GR} = \frac{2GM}{c^2 R}$, también conocida como *compacidad*. Otro test observacional muy preciso en ciertas circunstancias es el basado en la medida del efecto relativista del tiempo de retardo de las señales emitidas por los púlsares, denominado *efecto Shapiro o Shapiro time delay*, que ha sido utilizado para la medida precisa de la masa del pulsar más masivo hasta ahora conocido de $1.97M_\odot$ [6].

En la Figura 1 se muestra un diagrama de relaciones Masa-Radio para distintos modelos teóricos de EoS. Conviene destacar que en los cálculos iniciales realizados con las ecuaciones TOV se suponía que las estrellas de neutrones estaban formadas completamente por neutrones relativistas sin interacción (gas libre de neutrones), por lo que la ecuación de estado de dicho gas de neutrones es extremadamente "blanda" (soft); es decir, que aumenta muy poco la presión, P , al aumentar la densidad de energía, ε , y predicen un valor máximo de masa, M , de $0.7M_\odot$ para un valor de 17 veces la densidad de masa-energía en el centro de la estrella, $\rho(r=0)$, en unidades de ρ_0 . Por ello ya ha sido descartada. Además, cuando se introducen términos de interacción entre los neutrones el valor máximo de la masa de la estrella puede llegar hasta $3M_\odot$, para algunos modelos de EoS. Por otra parte, tal y como se observa en la Figura 2 algunas curvas de la familia de EoS no cortan la franja horizontal asociada a la masa medida para el púlsar J1614-2230 ($1.97 \pm 0.04M_\odot$). En particular, la mayoría de las curvas asociadas a materia exótica, tales como los consensados de kaones o de hiperones, que

tienden a predecir valores máximos de las masas inferiores a $2,0M_{\odot}$, por lo que serían descartadas [6].

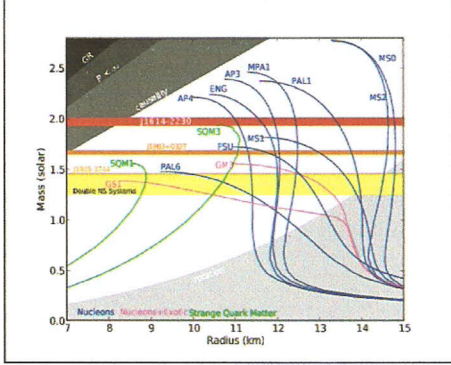


Figura 1 Relación masa-radio para distintos modelos de EoS. (Fuente: Demorest et al. [6])

Por lo tanto, es muy útil disponer de cotas máximas de parámetros astrofísicos observables para contrastarlos con los valores máximos predichos por la EoS. Así, por ejemplo, la ecuación (5), independiente de la EoS, debida a Lattimer y Prakash [4], permite obtener la frecuencia de rotación máxima de una estrella:

$$\nu_{spin \text{ máx}} = 1045 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{10} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (5)$$

mientras que la ecuación (6) da una cota superior al radio máximo en función de la masa [7]

$$R < 9,52 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{3}} km \quad (6)$$

Así, para un masa $M = 2M_{\odot}$, se obtendría una cota superior del radio igual a $9,52(2)^{\frac{1}{3}} = 11,99 km$. Por lo que, aquellos modelos teóricos de la EoS que predigan valores superiores a dicha cota superior quedarían descartados. En la Figura 2 se muestra un diagrama de valores máximos de la masa versus la densidad de energía central para la estrella de neutrones más compacta (maximal) frente a otros modelos de EoS. Se observa como a medida que la EoS se hace más pronunciada "stiff", el valor máximo de la masa de la estrella predicha por el modelo aumenta, así como su

tamaño, pero su densidad de energía central o su densidad de masa en el centro de la estrella disminuye. Y para valores superiores a una determinada densidad de energía central, $\varepsilon(r=0)$, la estrella se torna inestable y colapsa en un agujero negro. Por lo tanto, **para cada EoS hay un valor máximo de masa para una estrella de neutrones en equilibrio estable**. Si además aparecen nuevos grados de libertad a densidades de energía más altas, entonces se espera un suavizamiento de la EoS y por lo tanto una reducción del valor máximo de la masa de la estrella de neutrones, predichos por los modelos teóricos [4].

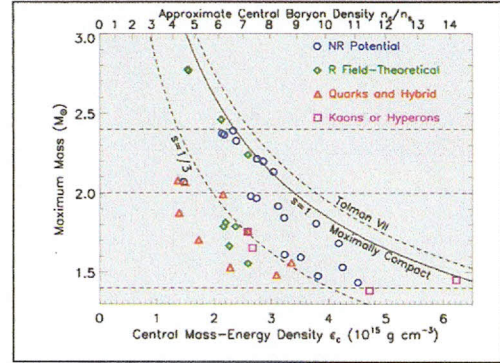


Figura 2 Diagrama masa máxima versus densidad de energía central máxima para diversas EoS (Fuente: Lattimer y Prakash [4])

Para la EoS de la estrella de neutrones más compacta se ha obtenido la relación siguiente [4]:

$$\varepsilon_{\text{máx}} \times M_{\text{máx}}^2 = 1,358 \times 10^{16} gcm^{-3} M_{\odot}^2 \quad (7)$$

Esta relación es muy importante, pues permite establecer cotas superiores al valor máximo de la densidad de energía central en cualquier estrella de neutrones para cada valor de la masa máximo predicho por los modelos.

En la Figura 3 se ilustra la estructura y composición de las estrellas de neutrones en función de la densidad, para los distintos modelos teóricos actuales, de los cuales no hay evidencia observacional hasta la fecha. La estructura está formada por una capa envolvente o atmósfera, una corteza y el núcleo. Donde, a su vez, la corteza se divide en corteza externa y corteza interna, y el núcleo, por su parte, se divide

The diagram illustrates the internal structure of a neutron star, showing concentric layers of different matter states. The layers are labeled as follows:

- Crust:** The outermost layer, composed of Fe and H/He atmosphere. The density is 10^6 g/cm^3 .
- Outer Core:** The layer below the crust, composed of nucleon star matter. The density is 10^{11} g/cm^3 .
- Inner Core:** The layer below the outer core, composed of neutron star matter with pion condensate. The density is 10^{14} g/cm^3 .
- Central Region:** The innermost layer, composed of color-superconducting strange quark matter (u.d.s quarks). The density is 10^{15} g/cm^3 .

The diagram also shows the transition from a quark-hybrid star to a hyperon star. The radius is indicated as $R \sim 10 \text{ km}$.

Información más detallada sobre la estructura, la composición y la ecuación de estado (EoS) de la materia nuclear en el interior de las estrellas de neutrones puede encontrarse en las referencias [5, 8–13].

Por otra parte, si fuera cierta la *hipótesis de la materia extraña* [14, 15], de que la materia formada por 3 sabores de quarks (u, d y s) fuera más estable que la materia ordinaria formada por núcleos atómicos, entonces en el interior de las estrellas de neutrones debería hallarse materia de quarks en lugar de materia hadrónica. Además, mediante un sencillo razonamiento geométrico se puede llegar a la conclusión de que a partir de cierto valor de la densidad de nucleones superior a $2,19n_0$ los hadrones pueden llegar a

3. Resultados originales

3.1. Difracción de Bragg en la corteza. ¿Tienen las estrellas una capa cristalina?

4

do a un sistema binario formado por dos estrellas de neutrones, siendo al menos una de ellas una estrella de neutrones inerte, cuya estructura cristalina se desea probar, que denominamos *Reflector*, y la otra un púlsar de rayos X, que no absorba gas o materia en acreción de su compañera, que denominamos *Pharus*.

Para simplificar los cálculos y la simulación de los patrones de difracción observables con telescopios hemos considerado los siguientes valores para los parámetros orbitales: 1) las masas de *Pharus* y de *Reflector* son iguales, siendo su masa $m = 1,35 \pm 0,04 M_{\odot}$, que es el valor medio típico medido de las estrellas dobles de neutrones, 2) tienen un radio $r = 10 \text{ km}$, 3) que describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas, donde se ha fijado un radio orbital entre las estrellas de $R \simeq 10000 \text{ km}$, 4) el período de rotación del púlsar $T_{\text{spin}} = 1 \text{ s}$, que es un valor típico para la mayoría de la población de púlsares, 5) el período de rotación orbital $T_{\text{orb}} \simeq 15 \text{ s}$, un múltiplo del mismo orden de T_{spin} , para facilitar la observación de la señal reflejada, que aunque es pequeño, comparado con los valores observados, no es imposible, y 6) que el ángulo de inclinación del plano de la órbita respecto al plano frontal o plano perpendicular al rayo visual es de 90° . En estas condiciones, ciertamente restrictivas, pero que sirven para ilustrar el modelo en un caso sencillo y académico, se espera obtener, en un observatorio en la Tierra o en un Telescopio espacial de rayos X, la señal primaria pulsada de rayos X procedente de *Pharus*, y una señal secundaria, intercalada con aquella, como resultado de la reflexión de la señal de *Pharus* en *Reflector* en su movimiento orbital alrededor de *Pharus*. Es decir, se espera obtener los patrones de difracción de Bragg, tanto para la señal primaria como la secundaria, cuya característica fundamental de la señal secundaria es que debe aparecer a las longitudes de onda $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \dots, \frac{\lambda}{n}$. Además, se describe como obtener la distancia interatómica de la red cristalina, partiendo del patrón de difracción para la secuencia de longitudes de onda de la señal secundaria y del ángulo formado entre *Pharus*, *Reflector* y la línea visual a tierra.

En la Figura 4 se muestra el esquema de la configuración orbital para observar la difracción, en el supuesto de que se cumpla la Ley de Bragg:

$$\cos \theta = \frac{n\lambda}{2d} \quad (8)$$

donde θ es el ángulo de incidencia que forma la señal procedente de *Pharus* con la normal al plano de reflexión en la superficie de *Reflector*, λ es la longitud de onda de la señal procedente de *Pharus*, d es la distancia entre los planos atómicos de la red cristalina en la corteza de *Reflector* y n un número entero que proporciona la secuencia de los picos de señales de Bragg. Como el $\cos \theta \leq 1$ y $n \geq 1$, dicha condición sólo puede ser satisfecha para $\lambda \leq 2d$. Como sabemos que $d = 0,3 \text{ nm}$ para cristales de hierro, y hemos estimado que d no varía en la superficie de las estrellas de neutrones, lo cual es cierto, según [18], debido a que las fuerzas gravitacionales en la superficie de *Reflector* deforman moderadamente la estructura cristalina hasta una profundidad de unas pocas micras, entonces la difracción de rayos X, para la supuesta estructura cristalina del hierro en la corteza de la estrella es similar a la existente en la tierra. En consecuencia, las longitudes de onda de las señales que se deben buscar son aquellas que cumplan $\lambda \leq 0,6 \text{ nm}$.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta en la obtención de los patrones de difracción es la corrección relativista por el *corrimiento hacia el rojo gravitacional*, mencionado en el apartado 2. Hemos corregido la condición de Bragg anterior por la ecuación:

$$\cos \theta = \frac{n\lambda^{\text{Earth}}}{2d(1+z)} \quad (9)$$

Además, hemos introducido en la ecuación anterior la expresión de la distancia entre planos del cristal, $d^2 = \frac{a^2}{h^2 + k^2 + l^2}$, en función de los índices de Miller h, k, l , y del tamaño de la celda unidad, a , al objeto de distinguir en los patrones de difracción de Bragg, si se corresponden con una estructura cristalina bcc o fcc, pues la difracción sólo ocurre en una red cristalina bcc para aquellas combinaciones de los índices que cumplan $h + k + l$ sea un número par, mientras que para un retículo cristalino fcc, la difracción ocurre cuando todos los índices h, k, l sean todos impares o pares. Así, la ecuación anterior se transforma en

$$\cos \theta = \frac{n\lambda^{\text{Earth}} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{2a(1+z)} \quad (10)$$

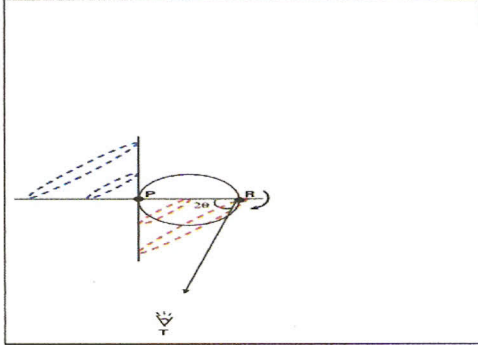


Figura 4 Configuración orbital
(T representa el observatorio en la tierra, P es
Pharus y R Reflector)

Cuando R (*Reflector*), en su movimiento orbital cruza el haz de radiación procedente de P (*Pharus*), entonces si la intensidad de la señal procedente de P es suficientemente intensa para que, tras su reflexión en R, pueda ser observada en la tierra, y se cumplen las condiciones de Bragg, sería posible obtener patrones de difracción de Bragg similares al representado en la figura 5, obtenidos en nuestra simulación computacional. Por ello, en nuestro programa se han fijado los valores de los parámetros orbitales, antes mencionados. En particular, como la intensidad de la señal reflejada por R es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre ambas estrellas, si queremos observarla su intensidad debe ser inferior a la intensidad de la señal de Pharus hasta 4 órdenes de magnitud, que es la sensibilidad actual de los telescopios. Además, hemos considerado también como factor adicional de decrecimiento de la intensidad reflejada en R, el hecho de que una fracción de la señal del haz que llega a *Reflector* se pierde por el efecto de la forma esférica de su superficie. Dicho efecto se ha introducido en el modelo computacional, mediante la fórmula siguiente, obtenida por analogía con la variación de las fases lunares: $F = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$, siendo F la fracción de la superficie de *Reflector* iluminada por *Pharus*, vista desde un observador en la tierra. Asimismo, se han estimado las posibles correcciones de la teoría general de la relatividad tales como: la potencia radiada por ondas

gravitatorias, la disminución del radio de la órbita, la disminución del período orbital y el tiempo estimado para que se produzca el colapso del sistema binario, pero los valores hallados nos han permitido despreciarlos, siempre que los tiempos de observación de los perfiles de las señales sean inferiores al tiempo hallado para el colapso del sistema binario, estimado entre 5 y 10 años.

Para la obtención del ángulo de reflexión, θ , hemos utilizado el efecto Doppler cinemático, que afecta a la forma del espectro de las señales de *Pharus* (señal primaria), y analizando los datos extraídos de las curvas de velocidad radial, junto con los desplazamientos Doppler se puede determinar la posición angular (fase) que corresponde a cada pico de señal de *Pharus*, y a partir de ese dato calcular el ángulo de reflexión de la señal en *Reflector* a partir de la fórmula: $\theta = \theta_0^{\text{Doppler}} + \frac{2\pi\Delta t}{T_{\text{orb}}}$. Además, *Reflector* cruzará el haz de radiación de *Pharus* para cada intervalo de tiempo que cumpla la relación entre números enteros: $\Delta t = l_1 T^{\text{orbit}} = l_2 T^{\text{spin}}$ (siendo l_1 y $l_2 \in \mathbb{N}$)

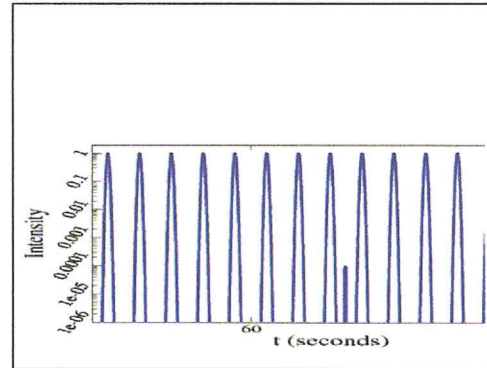


Figura 5 Ejemplo de patrón de señales del espectro observables de *Pharus* (señal primaria) y de *Reflector* (señal secundaria)

Como ya se ha indicado, lo que distingue a la difracción de Bragg frente a otros fenómenos astrofísicos que producen también señales secundarias complicadas, es que los picos de Bragg aparecen con valores específicos de λ , formando la secuencia $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \dots, \frac{\lambda}{n}$. Además, existe otra posición relativa de *Pharus* respecto a *Reflector*, simétrica respecto al plano que pasa por el CM; es decir, cuando

se intercambia en la figura 4 la posición de R y P, que también debería de producir otra secuencia adicional de picos de Bragg pero a las longitudes de onda $\lambda', \frac{\lambda'}{2}, \frac{\lambda'}{3}, \frac{\lambda'}{4} \dots$, estando relacionadas ambas longitudes de onda por $\lambda'^2 = (2d)^2 - \lambda^2$.

Como conclusión del test observacional, para obtener el valor de la distancia d entre los planos del cristal se deberían seguir los pasos siguientes:

- Encontrar un sistema binario capaz de reproducir el patrón de señales de Bragg propuesto. Debido a que no se puede calibrar a priori la energía, debido a los diferentes efectos de corrimiento hacia el rojo, una forma de proceder sería realizar estudios de correlación de la intensidad de las señales en función de la energía, $\langle I(E)I(2E) \rangle$.
- Medir el período de rotación del pulso principal de Pharos, T_{spin} .
- Realizar un simple análisis de números racionales, para obtener aproximadamente T_{orbit} de Reflector
- Obtener el ángulo de reflexión θ mediante una medida del efecto Doppler o mediante otro procedimiento astronómico.
- A partir de λ_0 , que es la longitud de onda más larga, que pueda ser vista en la tierra de *Reflector*, tras introducir las correcciones necesarias, se usa la Ley de Bragg para obtener d .

3.2. Neutrones cúbicos. Cálculo variacional basado en el modelo Cornell del gauge de Coulomb QCD

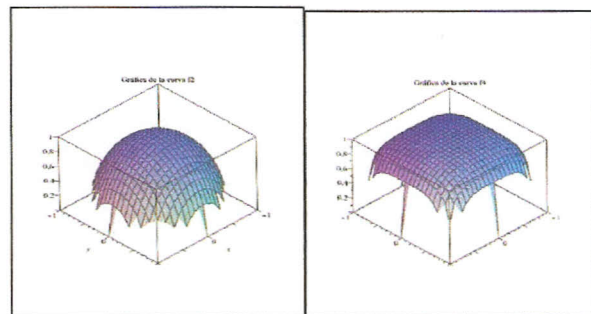
En esta parte del trabajo simulamos la deformación de neutrones, considerando que tienen simetría esférica y son incompresibles en los núcleos atómicos, a escalas de energía del orden de 10 MeV, pero que a escalas de energía mayores, del orden de 140 MeV, como las existentes en el interior de las estrellas de neutrones, podrían deformarse, manteniendo su volumen constante, y experimentar un cambio de simetría esférica a simetría a cúbica, al objeto de analizar el

balance energético en este proceso, para después compararlo y ver si es compatible con un cálculo teórico variacional basado en el modelo *Cornell del gauge de Coulomb QCD*. [19]

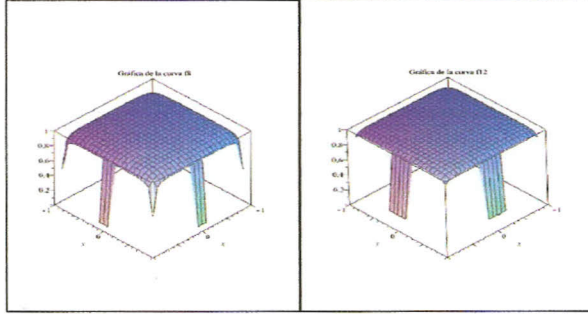
3.2.1. Simulación de neutrones cúbicos

Partimos del supuesto de que los neutrones inicialmente tienen forma esférica, cuya superficie se puede representar gráficamente mediante la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Ahora buscamos una función polinómica de grado N variable que aproxime o interpole su superficie entre la esfera del neutrón y el cubo circunscrito a la misma. Cuando probamos con la ecuación $x^N + y^N + z^N = R^N$ observamos que para valores pares de $N \geq 100$ el error de interpolación con la superficie cúbica es inferior a 10^{-3} , por lo que podemos considerar que dicha ecuación es una buena aproximación al problema de interpolación entre la esfera y su cubo circunscrito. A N , lo denominamos *parámetro de cubicidad*.

En las figuras 6, 7, 8 y 9 se representan las curvas $f_N = (1 - x^N - y^N)^{\frac{1}{N}}$ para los valores de $N=2,4,8$ y 12 para $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.



Figuras 6 y 7



Figuras 8 y 9

Evaluación numérica del volumen encerrado por las gráficas de las funciones f_N La fórmula (11), λ_N , nos proporciona $\frac{1}{8}$ del volumen encerrado por las gráficas de las funciones f_N , así como el valor de la densidad de empaquetamiento de los neutrones en función de N .

$$\lambda_N = \int_0^1 \int_0^{(1-x^N)^{\frac{1}{N}}} (1-x^N-y^N)^{\frac{1}{N}} dy dx \quad (11)$$

En efecto, para $N=2$, nos da $\frac{1}{8}$ del volumen de la esfera de radio unidad, $\lambda_2 \simeq 0,52$. Además, sabemos que dicho valor es igual al valor de la densidad de empaquetamiento compacto de esferas en retículos cristalinos cúbicos simples (sc) $\eta(sc) = \frac{V_{esferas}}{V_{retículo}} = \frac{(8 \times 1/8) \times \frac{4\pi r^3}{3}}{8r^3} \simeq 0,52$ donde se ha utilizado como valor de la arista del retículo cúbico simple $a_{sc} = 2r$ y una esfera en cada vértice del retículo (sc). Es decir, que hay el volumen de una esfera en cada retículo cúbico simple o celda unidad. En consecuencia, si vamos aumentando el valor de N , la densidad de empaquetamiento de los neutrones deformados será: $\eta_{sc}(N > 2) = \frac{V_{neutrón deformado}}{V_{retículo}} = \frac{8 \times \lambda_N}{8} = \lambda_N$, es decir, **el valor de λ_N nos da la densidad de empaquetamiento de los neutrones**, que vamos deformando hasta aproximarse a neutrones cúbicos, cuya densidad de empaquetamiento máxima (la unidad), se alcanza en la práctica para $N=100$, como se ve más adelante en la Tabla I. Análogamente, sabemos que en los empaquetamientos de esferas en retículos cúbicos centrados en las caras (fcc), su densidad de empaquetamiento es $\eta(fcc) = \frac{V_{esferas}}{V_{retículo}} =$

$\frac{(8 \times 1/8 + 6 \times 1/2) \times \frac{4\pi r^3}{3}}{16\sqrt{2}r^3} \simeq 0,74$ donde se ha utilizado que la longitud de la arista del retículo cúbico fcc o celda unidad es: $a_{fcc} = 2\sqrt{2}r$. Además, ésta es la densidad máxima de empaquetamiento, que en 1998 Hales ha demostrado que es maximal [20]. El volumen de las esferas en un retículo fcc es igual 8 octavos del volumen de una esfera, correspondientes a las esferas situadas en los 8 vértices del cubo, más 6 semiesferas correspondientes a las esferas de las seis caras del retículo. Es decir, que hay 4 esferas en una celda unidad fcc. Entonces, si vamos aumentando el valor de N , la densidad de empaquetamiento compacto fcc de los neutrones deformados será: $\eta_{fcc}(N > 2) = \frac{V_{neutrones deformados}}{V_{retículo}} = \frac{4 \times 8 \times \lambda_N}{4 \times 8} = \lambda_N$, y para el caso $N=2$, $\eta_{fcc}(2) \simeq 0,74$ como valor más eficiente del empaquetamiento fcc. Como **queremos estudiar la deformación del neutrón a volumen constante**, imponemos dicha condición para cada tipo de empaquetamiento. Esto es: $\frac{4\pi r^3}{3} = V(\text{Constante}) = \lambda_N \times l_N^3(sc)$, siendo $l_N^3(sc)$ el volumen de la celda unidad del retículo cúbico simple o del cubo circunscrito a cada neutrón deformado. Por lo que se obtiene $l_N^3(sc) = \frac{4\pi r^3}{3\lambda_N}$. Y para el empaquetamiento fcc, obtendríamos: $\frac{4\pi r^3}{3} = V(\text{Constante}) = \eta_{fcc}(N > 2) \times \frac{l_N^3(fcc)}{4} = \lambda_N \times \frac{l_N^3(fcc)}{4}$, siendo $l_N^3(fcc)$ el volumen de la celda unidad del retículo fcc. Por lo que el volumen del retículo fcc por neutrón es $V_N(fcc) = \frac{4\pi r^3}{3\lambda_N}$, es decir, $V_N(fcc) = l_N^3(sc)$, para $N > 2$.

Variación del volumen intersticial por neutrón en función del valor de N

El volumen intersticial por neutrón en función de N viene dado por las relaciones siguientes: $V_{intsc}(N) = l_N^3(sc) \times (1 - \lambda_N)$ y $V_{intfcc}(N) = V_N(fcc) \times (1 - \eta_{fcc}(N))$.

Entonces, el volumen ganado por el neutrón al aumentar N será: $\Delta V_{int} = V_{int}(N=2) - V_{int}(N)$.

En la tabla I se muestran algunos valores obtenidos para λ_N , l_N^3 y $\Delta V_{int}(N)$ para retículos sc, los valores para fcc no se muestran por diferir únicamente en la 4ª columna y en la 3ª para $N=2$. El volumen se expresa en unidades de fm^3 y se ha utilizado como radio del neutrón $r = 0,88 fm$.

Tabla I valores obtenidos para retículos SC

N	λ_N	$l_N^3 = \frac{4\pi r^3}{3\lambda_N}$	$\Delta V_{intsc}(N)$
2	0,5235987756	5.451 8	0
4	0,8102484190	3.523 1	1.928 7
6	0,9009586960	3.168 3	2.283 4
8	0,9395875453	3.038 1	2.413 7
10	0,9594044858	2.975 3	2.476 4
100	0,9995160472	2.855 9	2.595 8
1000	0,9999950748	2.854 6	2.597 2

A continuación representamos las curvas de variación del volumen ganado por neutrón, expresado en $(GeV)^{-3}$, en función del *parámetro de cubicidad*, N , para los empaquetamientos (sc) y (fcc). Se ha utilizado la equivalencia: $1 fm^3 = 1,30142957 \times 10^2 (GeV)^{-3}$

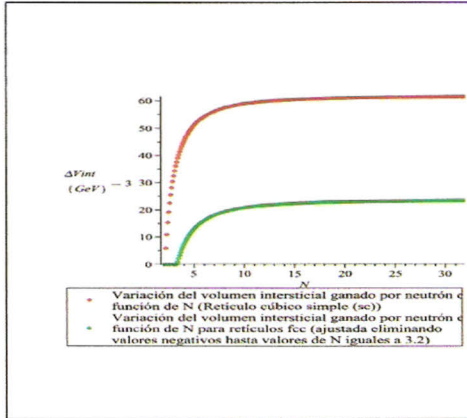


Figura 10 Volumen ganado por neutrón en función del parámetro de cubicidad (Verde(fcc) y rojo(sc))

3.2.2. Cálculo variacional

A continuación estimamos el coste energético de la deformación del neutrón mediante un método variacional basado en el Hamiltoniano de Cornell para el gauge de Coulomb QCD [19],

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = \Psi^\dagger(\vec{x})(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + m\beta)\Psi + \frac{1}{2} \int d^3y \Psi^\dagger(\vec{x}) T^a \Psi(\vec{x}) V(\vec{x} - \vec{y}) \Psi^\dagger(\vec{y}) T^a \Psi(\vec{y}) \quad (12)$$

un modelo de teoría cuántica de campos de la Cromodinámica Cuántica (QCD), que permite emplear las técnicas y métodos del problema de la interacción de muchos cuerpos, típicos en Física nuclear y de la materia condensada. Los campos relativistas de los quarks Ψ interactúan vía la densidad de carga de color $\Psi^\dagger(\vec{x}) T^a \Psi(\vec{x})$. El modelo ya ha sido ampliamente utilizado para estudiar el espectro del quarkonium [21, 22], así como para mesones y bariones ligeros [23, 24] con el potencial de interacción de Cornell $V(r) = \sigma r - \frac{4\alpha_s}{3r}$. Empleamos la aproxi-

mación del modelo BCS al estado fundamental (3P_0 quark-antiquark al condensado de vacío $|\Omega\rangle$) para generar los 3 quarks constituyentes del neutrón a partir de la corriente de quarks de masa $m = 5 MeV$ en el Hamiltoniano, aplicando la función de onda de la segunda cuantificación apropiada para bariones de 3 quarks en términos de los operadores de creación de Bogoliubov

$$|N\rangle = \frac{\epsilon^{ijk}}{6} F_N^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) B_{\vec{k}_1 \lambda_1 i}^+ B_{\vec{k}_2 \lambda_2 j}^+ B_{\vec{k}_3 \lambda_3 k}^+ |\Omega\rangle \quad (13)$$

Para hacer la aproximación variacional de Rayleigh-Ritz al estado de energía más bajo de los bariones, empleamos para la parte orbital la función de ondas separable $F_N(\mathbf{k}_\rho, \mathbf{k}_\lambda) = \psi_N\left(\frac{\mathbf{k}_\rho}{\alpha_\rho}\right) \psi_N\left(\frac{\mathbf{k}_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)$, siendo ρ, λ, R las coordenadas de Jacobi asociadas a 3 cuerpos, con componentes cartesianas ρ_x, λ_z , etc., en el sistema de referencia del centro de masas (CM) de los 3 quarks, de modo que $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$.

Además la función de onda de color $\frac{\epsilon^{ijk}}{6}$ se normaliza a 1 teniendo en cuenta todas las posibles contracciones de los campos en el cálculo de $\langle N|N \rangle$. Y puesto que construimos F_N de modo que sea totalmente simétrica ante el intercambio de 2 quarks, no realizamos la suma sobre todas las permutaciones posibles de estados de N en la base de ortonormalización, para evitar dobles cuentas.

Y ahora como función de ondas de prueba normalizada variacional utilizamos primero una ψ_N a partir de una solución numérica precisa conocida del problema de 2 cuerpos y usamos $\psi_N\left((k_x^N + k_y^N + k_z^N)^{\frac{1}{N}}\right)$ como función de onda que interpola entre la simetría

esférica, para $N = 2$, y la simetría cúbica, cuando $N \rightarrow \infty$, tal y como se ha visto en las figuras 6, 7, 8 y 9.

El valor esperado del Hamiltoniano que se minimiza $\langle N|H|N \rangle$ es una función de los parámetros variacionales $\alpha_\rho, \alpha_\lambda$. Para calcular el valor esperado, realizamos numéricamente la suma spinorial relativista para la parte de la función de onda de momento-spin-sabor, que debe ser completamente simétrica, teniendo en cuenta que el neutrón tiene spin e isospin igual a $1/2$, y dejamos la condición de antisimetría de la función de onda completa para el grado de libertad de color de los quarks, para ajustarla al final, así como que el término de interacción del Hamiltoniano sea diagonal en el sabor (isospin), y seguidamente se calcula la integral de 9 dimensiones asociada a los 3 quarks mediante métodos de Monte Carlo. La aproximación del modelo a la masa del neutrón resulta ser 980 MeV (con un error de 40 MeV), siendo la masa física 940 MeV . Hemos encontrado que la masa del neutrón aumenta alrededor de 150 MeV para valores del *parámetro de cubicidad* comprendidos entre $N=2$ y $N=18$. Además, se ha comprobado que el resultado hallado es independiente del spin, pues al repetir el cálculo para la resonancia bariónica $\Delta(1232)$, que tiene todos los spines de los quarks paralelos, se ha obtenido la misma energía de excitación. También, observamos que con un coste de 50 MeV el neutrón ya pierde casi su simetría esférica, y adopta simetría cúbica para el valor de 150 MeV . Una vez hallado el coste energético de 150 MeV , necesario para deformar el neutrón, ahora comparamos si dicho coste energético puede proceder de la energía libre de Helmholtz $P\Delta V$ obtenida al reducir el volumen intersticial entre los neutrones gracias al cambio de simetría esférica a cúbica. Y en efecto, sabemos que la máxima ganancia en volumen por neutrón en una estructura fcc, con densidad de empaquetamiento $0,74$ es el 26% del volumen inicial ocupado por neutrón. Entonces, teniendo en cuenta los resultados en la simulación de neutrones cúbicos, mostrados en la figura 10, se puede encontrar, a presión constante, para cada valor de N el valor del incremento de la densidad de energía. Por último, en la Figura 11 se muestra el efecto hallado de la deformabilidad del neutrón en la ecuación de estado (EoS)

de la materia neutrónica, donde se puede ver que **la EoS se suaviza a densidades relevantes para la estructura de las estrellas de neutrones.**

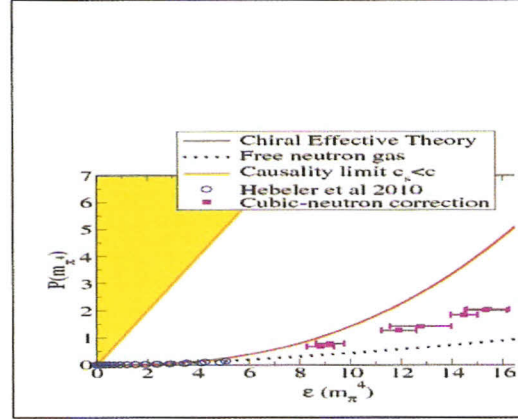


Figura 11 Efecto de la deformación de los neutrones en la EoS de la materia neutrónica [24, 25].

4. Conclusiones

Hemos visto que el conocimiento de la estructura y composición de la materia nuclear en el interior de las estrellas de neutrones es aún incompleto, dadas las condiciones extremas de presión y densidad presentes. Por ello, con este trabajo hemos pretendido aportar un granito de arena mediante la preparación de 2 artículos [18, 19] que pueden ser relevantes y de interés, pues pueden abrir nuevas líneas de investigación. En particular, la propuesta del Test observacional para observar patrones de difracción de Bragg en las estrellas de neutrones, puede ser relevante y de interés para astrofísicos. Mientras, que la idea de simular neutrones cúbicos y ver sus efectos en la estructura y ecuación de estado de la materia neutrónica, puede tener implicaciones tanto en astrofísica como en física hadrónica, ya que puede ser un factor que puede afectar a las propiedades macroscópicas observables de las estrellas de neutrones, así como a los estudios de las ecuaciones de estado de la materia nuclear en las estrellas de neutrones.

Bibliografía

- [1] Baade & Zwicky, 1934, *Cosmic rays from supernovae*, Proc. Nat. Acad. Sci., 20, 259
- [2] Hewish, A., Bell, S.J., Pilkington, J.D., Scott, P.F., & Collins, R.A. 1968, *Observation of a Rapidly Pulsating Radio source*, Nature, **217**, 709
- [3] Oppenheimer, J. R., & Volkoff, G. M., (1939), *On Massive Neutron Cores*, Physical Review, **55**, 374
- [4] Lattimer, J. M. & Prakash, M. 2010, *What a two solar mass Really Means?* (arXiv: 1012.3208 [astro-ph.SR])
- [5] Haensel, P., Potekhin, A.Y., and Yakovlev, D. G. *Neutron Stars. Equation of State and Structure* (Springer, New York, 2007)
- [6] Demorest et al., Nature **467**, 1081 (2010)
- [7] Lavagetto, G. et al. *Constraints to the EOS of Ultradense Matter with Model-Independent Astrophysical Observations* (arXiv: astro-ph/0612061)
- [8] Weber, F. *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*, High Energy Physics, Cosmology and Gravitation Series (IOP, Bristol, Great Britain, 1999)
- [9] Becker, W. (ed.) *Neutron Stars and Pulsars*, Astrophysics and Space Science Library 357, (Springer-Verlag, Berlin, 2009)
- [10] Glendenning, N. K. *Compact Stars, Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity* (Springer, New York, 2000)
- [11] Akmal, A., Pandharipande, V.R., and Ravenhall, D.G. *Equation of State of nucleon matter and neutron star structure*, Phys. Rev. C **58**, 1804 (1998)
- [12] Chamel, N. and Haensel, P. *Physics of Neutron Stars Crusts* (December 2008) (arXiv: 0812.3955v1 [astro-ph])
- [13] Leupold, S. et al.: *Part I Bulk Properties of Strongly Interacting Matter*. Lect. Notes Phys. **814**, 39-334 (2011)
- [14] Bodmer, A. R., Phys. Rev. D **4** (1971) 1601.
- [15] Witten, E., Phys. Rev. D **30** (1984) 272
- [16] Hill, H. J. and Paz, G., Phys. Rev. D **82** (2010) 113005, (arXiv:1008.4619-[hep-ph])
- [17] Alford, M. G., Schmit, A., Rajagopal, K., and Schäfer, T. *Color Superconductivity in dense quark matter*, (arXiv:0709.4635v2 [hep-ph])
- [18] Llanes-Estrada, F. J. and Moreno-Navarro, G. *Bragg Diffraction and the Iron Crust of cold Neutron Stars* to appear in Jour. Astrophys. Space Sci., 2011, (arXiv: 0905.4837v3[astro-ph.HE])
- [19] Llanes-Estrada, F. J. and Moreno-Navarro, G. *Cubic Neutrons* (arXiv: 1108.1859v1 [nucl-th])
- [20] Hales, T., Jour. Comp. App. Math. **44**, 41 (1992)
- [21] Eichten, E., Gottfried, K., Kinoshita, T, Lane, K, and Yan, T.M., Phys.Rev. **D17**, 3090 (1978).
- [22] Torres-Rincon, J. M., and Llanes-Estrada, F. J., Phys. Rev. Lett. 105, 022003 (2010)
- [23] Nakamura, K. et al. (Particle Data Group), J. Phys.. G G37, 075021 (2010)
- [24] Lacour, A., Oller, J., and Meissner, U._G., Annals Phys. **326**, 241 (2011)
- [25] Hebeler, K., Lattimer, J, Pethick, C. and Schwenk, A., Phys.Rev.Lett. **105**, 161102 (2010)

Figure 1 is a plot showing the neutron star mass (M_0) on the x-axis (ranging from 0.0 to 3.0) versus various physical parameters on the y-axis. The plot is divided into four horizontal bands, each representing a different type of binary system:

- Top Band (Green):** X-ray/Optical binaries. Parameters shown include $\log P$, $\log B$, and $\log L$.
- Second Band (Yellow):** double neutron star binaries. Parameters shown include $\log P$, $\log B$, and $\log L$.
- Third Band (Orange):** white dwarf-neutron star binaries. Parameters shown include $\log P$, $\log B$, and $\log L$.
- Bottom Band (Blue):** main sequence-neutron star binaries. Parameters shown include $\log P$, $\log B$, and $\log L$.

A vertical dashed line is drawn at $M_0 = 1.415$. A horizontal dashed line is drawn at $M_0 = 1.415$. The plot includes data points with error bars and labels for specific systems, such as "double neutron star binaries", "white dwarf-neutron star binaries", and "main sequence-neutron star binaries".

[illegible]

12